DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Analisis de Variable Real. Curso 15–16.
Conjuntos de números. Hoja 1

1 *Probar la "Propiedad de Buen Orden" de $\mathbb{N}$: todo conjunto no vacío tiene un primer elemento.*

2 *i) Demostrar que la ecuación $x^2 = 2$ no la satisface ningún número racional.*
ii) Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ no es racional.

3 *Demostrar que si $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entonces $r + x$ y rx son irracionales.*

4 *Demuestra que en $\mathbb{R}$ si $x < y$ y $a > 0$ entonces $ax < ay$, que si $0 < a < b$ y $x > 0$ entonces $ax < by$ y que si $0 < x$ entonces $x^2 < y^2$ y $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$. En particular concluye que si $0 < x < y$ entonces $x^n < y^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

5 *Si $a > 0$ demostrar que*
i) Si $a > 1$ entonces $1 < a < a^2 < a^3 < \ldots < a^n$, $n \in \mathbb{N}$.
ii) Si $0 < a < 1$ entonces $1 > a > a^2 > a^3 > \ldots > a^n$, $n \in \mathbb{N}$.
¿Qué pasa si $a < 0$?.

6 *Demostrar que*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Usando esto, deducir y demostrar una fórmula para la suma de los N primeros numeros pares y otra para la de los N primeros numeros impares.

7 *Demostrar que*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{n=0}^{M} z^n = \frac{1 - z^{M+1}}{1 - z}, \quad y \quad \sum_{n=N}^{M} z^n = \frac{z^N - z^{M+1}}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \ M > N.$$

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}, \quad \textit{Binomio de Newton} \quad (\textit{con } \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}).$$

8 *Demuestra que*
i) $n^3 + 5n$ es divisible por 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.
ii) $2^n < n!$, si $n \geq 5$.
iii) Desigualdad de Bernoulli: para todo $x > -1$ se tiene

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad n \in \mathbb{N}$$

11 *Demuestra que para todos $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$|a_1 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + \cdots + |a_n|$$

12 *i) Supongamos que una sucesión de números verifica*

$$a_{n+1} = ka_n, \quad a_0 \text{ dado}, \ n = 1, 2 \dots \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Encuentra y demuestra por inducción una expresión general para a_n.
ii) Idem si

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n}, \quad a_1 \text{ dado}, \ n = 1, 2 \dots$$

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad a_0, a_1 \text{ dados}, \ n = 1, 2 \dots.$$

13 *Si*

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}, \quad a_0, a_1 \text{ dados}, \ n = 1, 2 \dots$$

con $0 < a_0, a_1 < 2$*, probar que* $0 < a_n < 2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

14 *Supongamos que*

$$0 \le y_{n+1} \le ky_n, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Demostrar que

$$0 \le y_n \le k^{n-1} y_1, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

15 *Si* $a_1, \dots, a_n$ *son positivos probar que*

$$\Big(a_1 + a_2 + \dots + a_n\Big)\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\Big) \ge n^2$$

16 *Demostrar por inducción en el número de elementos, que todo conjunto finito de* $\mathbb{R}$ *se puede ordenar de manera creciente.*

17 *Encuentra todos los números reales que verifican*
i) $x^2 = 2x$, *ii)* $x^2 > 3x+4$, *iii)* $1 < x^2 < 4$, *iv)* $\frac{1}{x} < x$, *v)* $\frac{1}{x} < x^2$, *vi)* $|x-1| - |x-2| = 0$, *vii)* $|x| + |x-1| = 1$, *viii)* $|4x-5| < 13$, *ix)* $|x^2-1| = 3$, *x)* $|x-1| > |x+1|$, *xi)* $|x| + |x+1| < 2$.

18 *Demostrar que*

$$|z+w| \le |z| + |w|, \qquad |zw| = |z||w|, \qquad z, w \in \mathbb{C}$$

19 *Demostrar que si* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *entonces*

$$z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

y que por tanto el inverso de z *es* $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$*. Dibuja el inverso.*
Probar que en forma polar, si $z = re^{i\theta}$ *entonces* $\bar{z} = re^{-i\theta}$ *y* $z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$.

21 *Calcular las raíces complejas de la unidad:* $z \in \mathbb{C}$ *tales que* $z^n = 1$ *con* $n = 2, 3, 4 \dots$ *y dibujarlas.*

22 *Sean X e Y son dos conjuntos y $f : X \to Y$ una aplicación (o función).*
i) Si $A, B \subset X$ demostrar que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ y que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ pero en general no se da la igualdad en el último caso.

Si f es inyectiva, probar que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
ii) Generaliza lo anterior para una familia arbitraria de conjuntos $A_i \subset X$, $i \in I$ (conjunto de indices), probando que

$$f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i), \qquad f(\cap_{i\in I} A_i) \subset \cap_{i\in I} f(A_i)$$

y que si f es inyectiva se da la igualdad en la última expresión.

23 *Sean X e Y son dos conjuntos y $f : X \to Y$ una aplicación (o función). Si $C \subset Y$ definimos la preimagen de C por f como*

$$f^{-1}(C) = \{x \in X,\ f(x) \in C\} \subset X.$$

Probar que para una familia arbitraria de conjuntos $C_i \subset Y$, $i \in I$ (conjunto de indices), se tiene

$$f^{-1}(\cup_{i\in I} C_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(C_i), \qquad f^{-1}(\cap_{i\in I} C_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(C_i)$$

24 *Sea $A = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 1\}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{x-1}$ para $x \in A$.*

Demostar que f es inyectiva, determinar el rango de f: $R(f) = Im(f) = \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ f(x) = y\}$ y calcular la función inversa de f.

25 *Encontrar una aplicación biyectiva entre $A = \{x \in \mathbb{R},\ 2 < x < 3\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R},\ 5 < x < 10\}$*